TEMA I
INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Policarpo Abascal Fuentes

TEMA 1

1. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

1.1 INTRODUCCIÓN

1.2 LÓGICA PROPOSICIONAL

1.2.1 Conexiones lógicas

1.2.2 Proposiciones condicionales

1.2.3 Tablas de verdad

1.2.4 Jerarquía de los conectores

1.2.5 Ejemplos de proposiciones compuestas

1.2.6 Lógica y operaciones con bits

TEMA 1

1.3 EQUIVALENCIAS PROPOSICIONALES

1.3.1 Tautologías y Contradicciones

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

1.4 CUANTIFICADORES

1.5 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

1.5.1 Introducción

1.5.2 Reglas de inferencia

1.5.3 Falacias

1.5.4 Métodos para demostrar teoremas

1. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

Bibliografía

Rosen K.H.,
Matemática discreta y aplicaciones,
Editorial McGraw-Hill

Johnsonbaugh, R.,
Matemáticas discretas,
Prentice Hall

Grassman, W.K. and Tremblay, J.P.,
Matemática discreta y Lógica,
Prentice Hall

1.1 INTRODUCCIÓN

Definición

La **Lógica** es el estudio del razonamiento, en particular, se analiza si un razonamiento es correcto.

La Lógica se centra en las relaciones entre los enunciados y no en el contenido de ellos.

Ejemplo

Es de mala educación que un hombre tenga la cabeza cubierta en un recinto cerrado.

Hay un alumno en este aula con una gorra en la cabeza.

Conclusión

El alumno es un mal educado.

1.2 LÓGICA PROPOSICIONAL

Definición

Una **proposición** es la mínima unidad del lenguaje con contenido de información sobre la que es posible pronunciarse con un verdadero o con un falso. Cuando es cierta se le atribuye el valor lógico **1** ó **V** y si es falsa **0** ó **F**.

Las proposiciones mas sencillas posible se denominan **atómicas** y se representan habitualmente con letras minúsculas a partir de la p.

Una proposición expresada como una cadena de caracteres se denomina **expresión lógica** ó **fórmula**.

$$P \wedge Q$$

1.2 LÓGICA PROPOSICIONAL

Ejemplos

- "¿Es esto verdadero?" no es una proposición.
- "Juan es un nombre" es una proposición.
- "8 es un número primo" es una proposición.
- "8 no es un número primo" es una proposición.

1.2 LÓGICA PROPOSICIONAL

Definición

Las proposiciones constituidas por proposiciones atómicas y otras partículas que sirven de nexo se llaman **moleculares** o **compuestas** y se representan habitualmente con letras mayúsculas a partir de la P.

Ejemplos

- Federico es alto y Jaime también.
- Federico y Jaime son altos.
- Las manzanas son verdes o amarillas.
- Mozambique es un país o una ciudad.
- Juan no es alto.

1.2.1 Conexiones lógicas

Definición

Un **conector lógico** es una partícula que se utiliza para formar las proposiciones moleculares, es decir, un elemento del lenguaje que permite construir frases nuevas a partir de las existentes, obteniendo así nuevos significados.

1.2.1 Conexiones lógicas

Definición

Si p y q son proposiciones

La **disyunción** (o inclusiva) $p \vee q$

es falsa sólo cuando son falsas simultáneamente p y q.

La **conjunción** (y) $p \wedge q$

es cierta sólo cuando son ciertas simultáneamente p y q.

El conector (o exclusivo) (XOR) $p \oplus q$

es verdadero cuando exactamente una de las dos proposiciones p ó q es cierta y falsa en otro caso.

La **negación** (no) $\sim p$

es cierta sólo cuando es falsa p.

Ejemplos

1.2.2 Proposiciones condicionales

Definición

Si p y q son proposiciones

$$\boldsymbol{p \longrightarrow q}$$

sólo es falsa cuando p es cierta y q falsa; en el resto de casos es verdadera.

p es la *hipótesis (o antecedente)* y q es la *conclusión (o consecuente)*.

Ejemplos

- Si María estudia mucho será buena estudiante.
- Juan puede cursar Matemática Aplicada a la Seguridad en Redes Informáticas sólo si está en tercer curso de carrera.
- Que Julio visite las Casas Colgantes es una condición suficiente para que visite Cuenca.

1.2.2 Proposiciones condicionales

Ejemplo

Estructuras *si-entonces* o *si-entonces-sino*

Si p es una sentencia relacional y q y r son enunciados ejecutables

Si p entonces q

si p es cierta se ejecuta q si p es falsa se sigue a la sentencia siguiente

Si p entonces q sino r

si p es cierta se ejecuta q si p es falsa se ejecuta r y sigue a la sentencia siguiente

```
if a > 1
  n=n+1;
else
  n=n-1;
end
```

1.2.2 Proposiciones condicionales

Nota Dos proposiciones importantes son:

- $F \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow V$

Ambas dan lugar a **V**.

Definición La inversa de una proposición condicional $p \rightarrow q$ es la proposición $\sim p \rightarrow \sim q$

Definición La recíproca de una proposición condicional $p \rightarrow q$ es la proposición $q \rightarrow p$

Definición El contrarecíproco o trasposición de una proposición condicional $p \rightarrow q$ es la proposición $\sim q \rightarrow \sim p$

1.2.2 Proposiciones condicionales

Definición

Si p y q son proposiciones

$$\boldsymbol{p} \longleftrightarrow \boldsymbol{q}$$

es cierta sólo si p y q tienen el mismo valor de verdad.

Formas alternativas

"p es condición necesaria y suficiente para q".

"p ssi q".

1.2.3 Tablas de Verdad

Definición

Una **tabla de verdad** de una proposición da los valores verdaderos de la proposición para todas las asignaciones posibles.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}$	$\sim\mathbf{p}$	$\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \longleftrightarrow \boldsymbol{q}$
V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V	V

1.2.4 Jerarquía de conectores

$\longleftrightarrow$
$\longrightarrow$
$\vee$
$\wedge$
$\sim$

1.2.6 Lógica y operaciones con bits

x	**y**	**x** $\vee$ **y**	**x** $\wedge$ **y**	**x** $\oplus$ **y**
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

01	1011	0110	
11	0001	1101	
11	1011	1111	operación OR
01	0001	0100	operación AND
10	1010	1011	operación XOR

1.3 Equivalencias proposicionales

1.3.1 Tautologías y contradicciones

Definición

Una expresión lógica es una tautología si es verdadera para todas las asignaciones posibles.

Definición

Una expresión lógica es una contradicción si es falsa para todas las asignaciones posibles. Se suele representar mediante el símbolo $\emptyset$.

Definición

Una expresión lógica que no sea una tautología ni una contradicción se denomina contingencia (casualidad/eventualidad).

1.3.1 Tautologías y contradicciones

Ejemplo:

Tabla de verdad de $\sim(P \wedge Q) \vee Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim(P \wedge Q) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

1.3.1 Tautologías y contradicciones

Notación

Si $P \to Q$ es una tautología se le llama **implicación** y se escribe $P \Rightarrow Q$

Si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología se dice que es una **doble implicación**, se escribe $P \Leftrightarrow Q$

A es una tautología se suele escribir $\models A$.

$$\models \sim (P \wedge Q) \vee Q$$

Ley del medio excluido $\quad \models P \vee \sim P$

1.3.1 Tautologías y contradicciones

$P \wedge Q$	$\Rightarrow$	P	Simplificación
P	$\Rightarrow$	$P \vee Q$	Adición
Q	$\Rightarrow$	$(P \rightarrow Q)$	Condicional
$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]$	$\Rightarrow$	$(P \rightarrow R)$	Silogismo Hipotético
$(P \vee Q) \wedge \sim P$	$\Rightarrow$	Q	Silogismo Disyuntivo
$[(P \rightarrow Q) \wedge P]$	$\Rightarrow$	Q	Modus Ponens
$[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q]$	$\Rightarrow$	$\sim P$	Modus Tollens

Ejemplo Silogismo Disyuntivo

1.3.1 Tautologías y contradicciones

P	$\sim P$	$P \wedge \sim P$
V	F	F
F	V	F

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge \sim P$	$(P \vee Q) \wedge \sim P \wedge \sim Q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	F
F	F	F	F	F

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Definición

Dos formas proposicionales P y Q se dicen lógicamente equivalentes, y se escribe $P \equiv Q$, si sus tablas de verdad coinciden.

Nota

Esto equivale a decir que $P \leftrightarrow Q$ es una tautología; así, $P \equiv Q$ es lo mismo que decir $P \Leftrightarrow Q$.

El programa está bien escrito y bien documentado.

El programa está bien documentado y bien escrito.

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Leyes de De Morgan

1. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
2. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

1.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\sim(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$	$\sim \mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q}$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

2. La otra afirmación se deja como ejercicio.

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Transposición o contrarecíproco

Definición La contrarrecíproca o trasposición de una proposición condicional $p \longrightarrow q$ es la proposición $\sim q \longrightarrow \sim p$

Teorema La proposición condicional $p \longrightarrow q$ y su contrarrecíproca $\sim q \longrightarrow \sim p$ son lógicamente equivalentes.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$	$\sim \mathbf{q} \rightarrow \sim \mathbf{p}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Eliminación de Condicionales

$$P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

P	Q	$\sim P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Eliminación de Bicondicionales

$$P \leftrightarrow Q \quad \equiv \quad (\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \quad \equiv \quad (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

P	Q	$\sim P \vee Q$	$P \vee \sim Q$	$(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Leyes	Nombre
$P \vee \sim P \equiv V$	Ley de medio excluido
$P \wedge \sim P \equiv F$	Ley de contradicción
$P \vee F \equiv P$ $P \wedge V \equiv P$	Leyes de identidad
$P \vee V \equiv V$ $P \wedge F \equiv F$	Leyes de dominación
$P \vee P \equiv P$ $P \wedge P \equiv P$	Leyes de idempotencia

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Leyes	Nombre
$\sim(\sim P) \equiv P$	Doble negación
$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	Conmutativas
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	Asociativas
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributivas
$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$ $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$	Leyes de De Morgan

1.3.2 Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica

Leyes de absorción

$$\begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &\equiv P \\ P \wedge (P \vee Q) &\equiv P \end{aligned}$$

- $P \vee (P \wedge Q) \equiv (P \wedge V) \vee (P \wedge Q)$ Ley de identidad
- $P \wedge (V \vee Q)$ Ley distributiva
- $P \wedge V$ Ley de dominación
- P Ley de identidad

Otras leyes

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) &\equiv Q \\ (P \vee Q) \wedge (\sim P \vee Q) &\equiv Q \end{aligned}$$

1.4 Cuantificadores

Definición

Sea $P(x)$ un enunciado que contiene una variable que llamaremos x y sea D un conjunto.

P es una función proposicional con respecto a D si para cada x en D, $P(x)$ es una proposición.

Se dice que D es el dominio de discurso de P.

Ejemplos

- $n^2 + 2n$ es un número impar. ($\mathbb{N}$).
- $x^2 - x - 6 = 0$. ($\mathbb{R}$).
- El hotel se catalogó como de tres estrellas. Considérese como dominio de discurso el conjunto de todos los hoteles de una región.

1.4 Cuantificadores

Cuantificador Universal

Definición

Sea A una expresión y sea x una variable. Si deseamos indicar que A es verdadero para todos los posibles valores de x, escribiremos $\forall\, xA$. $\forall\, x$ se denomina cuantificador universal, y A se denomina ámbito o alcance del cuantificador.

Ejemplo

Todo el mundo tiene buena suerte de vez en cuando.

$B \equiv$ "tener buena suerte de vez en cuando"

$B(x) \equiv$ "x tiene buena suerte de vez en cuando"

$$\forall\, xB(x) \text{ en el conjunto de los seres humanos.}$$

1.4 Cuantificadores

Cuantificador Existencial

Definición

Sea A una expresión y x una variable. Si deseamos indicar que A es verdadero para al menos un valor de la variable x, escribiremos $\exists\, xA$. $\exists$ se denomina cuantificador existencial, y A es el ámbito o alcance del cuantificador existencial.

Ejemplo

Hay una persona que ha irrumpido en el aula con malos modales.

$B \equiv$ "irrumpir en el aula con malos modales"

$B(x) \equiv$ "x irrumpe en el aula con malos modales"

$$\exists x B(x) \text{ en el conjunto de los seres humanos.}$$

1.4 Cuantificadores

Para cada número real x, si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$ si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

Sea x un número real. Es cierto que para cualquiera que sea el número real x, $x \leq 1$ ó $x > 1$.

- Si $x \leq 1$
- Si $x > 1$

Para cada número entero positivo x, si x es par, entonces $x^2 + x + 19$ no es múltiplo de 19

$x = 18$ ó $x = 38$

1.4 Cuantificadores

Leyes de De Morgan generalizadas

Si P es una función proposicional, cada par de proposiciones en 1 y 2 tiene el mismo valor de verdad

1. $\sim (\forall\, x, P(x)); \exists\, x, \sim P(x)$
2. $\sim (\exists\, x, P(x)); \forall\, x, \sim P(x)$

1.4 Cuantificadores

Resumiendo:

- $\forall\, x$, $P(x)$ es verdadera si para cada x en el dominio de discurso $P(x)$ es cierta.
- $\exists\, x$, $P(x)$ es verdadera si hay algún x en el dominio de discurso para el que $P(x)$ es cierta. Basta un solo valor.
- $\forall\, x$, $P(x)$ es falsa si hay un valor de x en el dominio de discurso para el que $P(x)$ es falsa. Basta un solo valor.
- $\exists\, x$, $P(x)$ es falsa si para cada x en el dominio de discurso $P(x)$ es falsa.

1.5 Métodos de demostración

1.5.1 Introducción

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema Matemático}\\ \Downarrow \\ \text{Axiomas, definiciones y términos no definidos}\end{array}}$$

Se suponen ciertos los axiomas.

Las definiciones se utilizan para crear conceptos nuevos en términos de los ya existentes.

Algunos términos no se definen en forma explícita, sino que se definen en forma implícita en los axiomas.

Un **teorema** es una proposición cuya verdad se ha demostrado. Algunos tipos especiales de teoremas se conocen por **lemas** o **corolarios**.

1.5.2 Reglas de inferencia

Definición

Un argumento es una serie de proposiciones que se escriben

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array} \quad \text{ó} \quad p_1, p_2, \ldots, p_n / \therefore q \quad \text{ó} \quad p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n / \therefore q$$

Las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las **hipótesis** o **premisas** y la proposición q es la **tesis** o **conclusión**.

1.5.2 Reglas de inferencia

Un argumento lógico es **válido** si la conclusión se deduce lógicamente de las premisas, es decir, siempre que sean ciertas las premisas entonces también lo es la conclusión. En caso contrario, el argumento no es válido.

Un argumento que establece la veracidad de un teorema es una **demostración** y la lógica es una herramienta para el **análisis de las demostraciones**.

1.5.2 Reglas de inferencia

La mayoría de los argumentos utilizados en la práctica son informales.

Los argumentos formales $\rightarrow$ derivaciones o demostraciones formales.

Todos tienen en común

- Una lista de argumentos lógicos admisibles llamados reglas de inferencia.
- La derivación por sí misma, que es una lista de expresiones lógicas
  - Originalmente la lista es vacía
  - Se añaden las reglas que se utilizan
  - Se llega a la conclusión

1.5.2 Reglas de inferencia

Leyes	Nombre
$P, Q \models P \wedge Q$	Ley de combinación
$P \wedge Q \models Q$	Ley de simplificación
$P \wedge Q \models P$	Variante de la Ley de simplificac
$P \models P \vee Q$	Ley de adición
$Q \models P \vee Q$	Variante de la Ley de adición
$P, P \rightarrow Q \models Q$	Modus ponens (Método de afirmac
$\sim Q, P \rightarrow Q \models \sim P$	Modus tollens (Método de negaci
$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \models P \rightarrow R$	Silogismo hipotético

1.5.2 Reglas de inferencia

Leyes	Nombre
$P \vee Q, \sim P \models Q$	Silogismo disyuntivo
$P \vee Q, \sim Q \models P$	Variante del Silogismo disyuntivo
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	Leyes conmutativas
$P \to Q, \sim P \to Q \models Q$	Ley de casos
$P \leftrightarrow Q \models P \to Q$	Eliminación de equivalencia
$P \leftrightarrow Q \models Q \to P$	Eliminación de equivalencia
$P \to Q, Q \to P \models P \leftrightarrow Q$	Introducción de la equivalencia
$P, \sim P \models Q$	Ley de inconsistencia

Sin premisas $\models P \vee \sim P$

1.5.3 Falacias

Las falacias parecen reglas de inferencia pero están basadas en contingencias y no en tautologías.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración vacía

Si la hipótesis p de una implicación $p \longrightarrow q$ es falsa, entonces la implicación es verdadera

Ejemplo

Si $P(n)$ es la función proposicional

"Si $n > 1$ entonces $n^2 > n$"

Mostrar que $P(0)$ es verdadera.

$P(0)$ es “Si $0 > 1$ entonces $0^2 > 0$“ y como la hipótesis es falsa la implicación es automáticamente cierta.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración trivial

Si la conclusión q de una implicación $p \longrightarrow q$ es cierta entonces la implicación es verdadera

Ejemplo

Sea $P(n)$ "si a es un número real positivo tal que $0 < a < 1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + na$".

Demostremos que $P(0)$ es verdadero.

$P(0)$ es "si a es un número real positivo tal que $0 < a < 1$, entonces $(1+a)^0 \geq 1 + 0a$". Como $1 = (1+a)^0 \geq 1 + 0a = 1$, la conclusión $P(0)$ es cierta.

Observemos que no hemos utilizado la hipótesis de la implicación $(0 < a < 1)$.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración directa

Teorema de la deducción

Para demostrar $A \Rightarrow B$ en matemáticas, se utiliza con frecuencia el siguiente argumento:

- Se supone A, y se añade A a las premisas.
- Se demuestra B, utilizando A, si fuera necesario.
- Se prescinde de A, lo que significa que A no es necesariamente cierta, y se escribe $A \Rightarrow B$.

1.5.3 Métodos para demostrar teorema

Demostración directa

Ejemplo: Demostrar el Silogismo Hipotético utilizando el teorema anterior y el Modus Ponens.

Derivación formal	Regla	Comentario
1. $P \to Q$	Premisa	
2. $Q \to R$	Premisa	
3. P	Hipótesis	Se supone cierta P
4. Q	1,3 y MP	
5. R	2,4 y MP	R está demostrado ahora
6. $P \to R$	Teorema	Se deja de suponer cierto P.

Ya se puede concluir el silogismo

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración directa

Ejemplo:

Si n es un entero impar entonces n^2 es un entero impar.

Si n es impar, $n = 2k + 1$ con k entero y, entonces,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración por casos

Para demostrar

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \longrightarrow q$$

podemos utilizar la tautología

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \longrightarrow q]$$

$$\Updownarrow$$

$$[(p_1 \longrightarrow q) \vee (p_2 \longrightarrow q) \vee \ldots \vee (p_n \longrightarrow q)]$$

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración por casos

Ejemplo
Si n es un número positivo entero cualquiera y $N = n(n+2)(5n-1)(5n+1)$, entonces N es múltiplo de 8.

Así hemos probado que $p_1 \longrightarrow q$ y $p_2 \longrightarrow q$ son ciertos y por tanto $(p_1 \vee p_2) \longrightarrow q$ también, y como $p_1 \vee p_2$ equivale a p, se concluye que $p \longrightarrow q$ es verdadero.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración indirecta

Se pretende probar la implicación $p \longrightarrow q$ viendo que su contrarrecíproca, $\sim q \longrightarrow \sim p$, es verdadera

Ejemplo

Si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Supongamos que n es par, entonces $n = 2k$ para algún entero k.

Así $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$ que es par por ser múltiplo de 2.

Como la negación de la conclusión implica que la hipótesis es falsa, hemos probado la contrarrecíproca de nuestra implicación.

Luego la implicación original es verdadera.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración por reducción al absurdo

La técnica sería la siguiente:

- Se supone cierto A.
- Se demuestra que esta hipótesis conduce a contradicción.
- Se concluye $\sim A$.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración por reducción al absurdo

Ejemplo: Demostrar $P \to Q$ y $P \to \sim Q$, entonces $\sim P$.

Derivación formal	Regla	Comentario
1. $P \to Q$	Premisa	
2. $P \to \sim Q$	Premisa	
3. $\sim(\sim P) = P$	Hipótesis	Se supone falsa la conclusión $\sim P$
4. Q	1,3 y MP	
5. $\sim Q$	2,3 y MP	
6. $Q \wedge \sim Q$	4,5 y C	Tenemos la contradicción buscada.

Puesto que P conduce a contradicción se concluye $\sim P$

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración de una doble implicación

Las equivalencias son muy importantes en cualquier teoría.

En Matemáticas, se suele utilizar la siguiente técnica para la demostración de equivalencias:

- Se supone cierto A.
- Se demuestra B.
- Se tiene $A \Rightarrow B$, se prescinde de A.
- Se supone cierto B.
- Se demuestra A.
- Se tiene $B \Rightarrow A$, se prescinde de B.
- Se concluye $A \Leftrightarrow B$.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración de una doble implicación

Ejemplo

Un número entero n es par si y sólo si su cuadrado n^2 es par.

Sean py q, las proposiciones ”n es par” y ”n^2 es par”, respectivamente.

Veamos que $p \leftrightarrow q$.

Primero veamos $p \longrightarrow q$. Si n es par, entonces $n = 2r$ para algún entero r, y $n^2 = 4r^2$ que es par.

Ahora veamos $p \longleftarrow q$. Para ello podemos utilizar un razonamiento indirecto. Si n no es par, entonces $n = 2r + 1$ para algún r, luego $n^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4(r^2 + r) + 1$ que es impar.

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración de equivalencias múltiples

Para demostrar que n proposiciones tienen los mismos valores de verdad, es decir que son equivalentes, podemos utilizar la siguiente tautología:

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n]$$

$$(p_1 \longrightarrow p_2) \wedge (p_2 \longrightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \longrightarrow p_n) \wedge (p_n \longrightarrow p_1)$$

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración de equivalencias múltiples

Ejemplo:
Si n es un natural, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 5 es divisor de n
- 5 es divisor de n^2
- 5 no es divisor de $n^2 - 1$ ni de $n^2 + 1$

Queremos ver

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3$$

pero vamos a demostrar

$$(p_1 \longrightarrow p_2) \wedge (p_2 \longrightarrow p_3) \wedge (p_3 \longrightarrow p_1)$$

1.5.3 Métodos para demostrar teoremas

Demostración de equivalencias múltiples

Ejemplo:
[$p_3 \longrightarrow p_1$] Entre los 5 números consecutivos $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ y $n+2$, uno ha de ser múltiplo de 5.
Como 5 no es divisor de n^2-1, tampoco de $n-1$ ni de $n+1$.
Si fuese divisor de $n-2$, entonces n sería de la forma $n=5m+2$ y $n^2=25m^2+20m+4$ resultando ser n^2+1 múltiplo de 5, lo que no puede ser por hipótesis.
Igual para $n+2$.
Por lo tanto se deduce que debe ser divisor de n